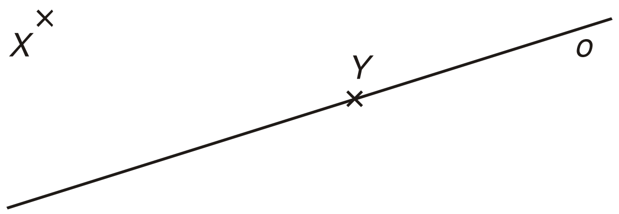
3.4.2 Osová souměrnost

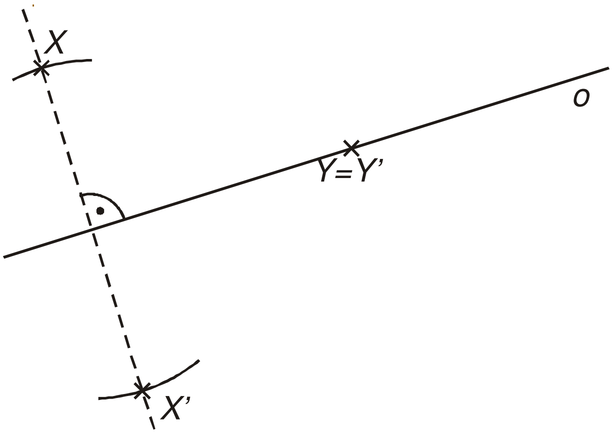
Předpoklady: 030401

Je dána přímka o. **Osová souměrnost s osou** $\boldsymbol{o}$ je shodné zobrazení $O(o)$, které přiřazuje:
1. každému bodu $X \notin o$ bod X' tak, že přímka XX' je kolmá k přímce o a střed úsečky XX' leží na přímce o
2. každému bodu $Y \in o$ bod $Y' = Y$.

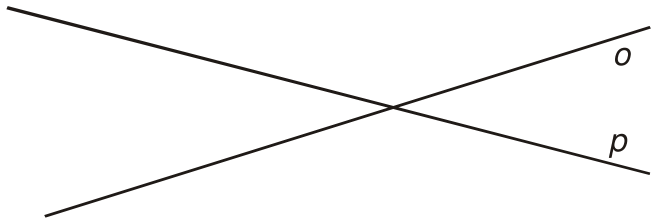
Př. 1: Nakresli přímku o, bod X, který na ní neleží, a bod Y, který na ní leží. Nakresli obrazy bodů X a Y v osové souměrnosti $O(o)$.



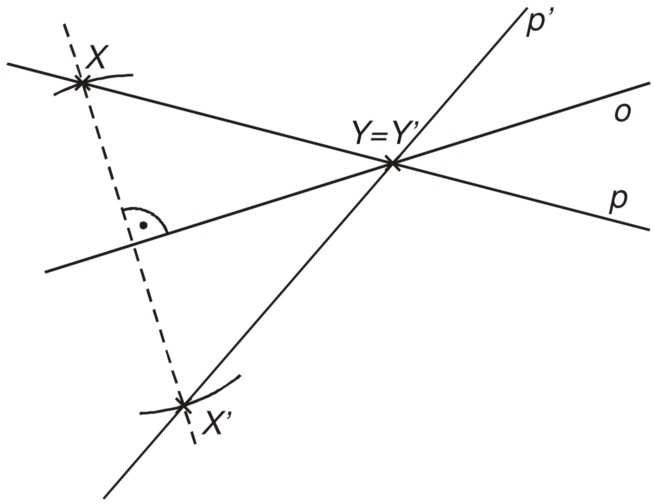
Obrazy bodů sestrojíme dle předchozí definice:
- obraz bodu X pomocí kolmice na přímku o,
- obraz bodu Y leží v bodě Y.



Př. 2: Jsou dány dvě různoběžné přímky p a o. Narýsuj obraz přímky p v osové souměrnosti $O(o)$.

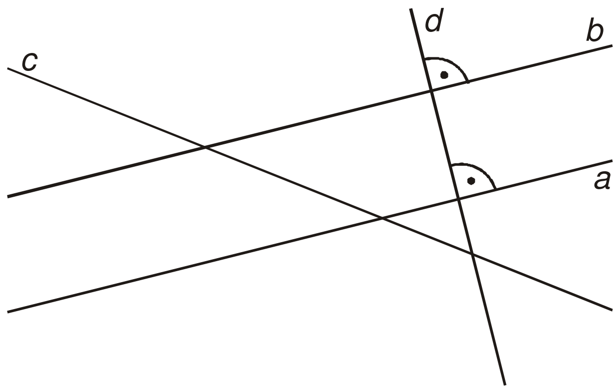


Přímka je dána dvěma body $\Rightarrow$ na přímce p zvolíme dva body (nejlépe jako jeden z nich průsečík s osou o), sestrojíme jejich obrazy a pomocí těchto obrazů sestrojíme přímku p'.



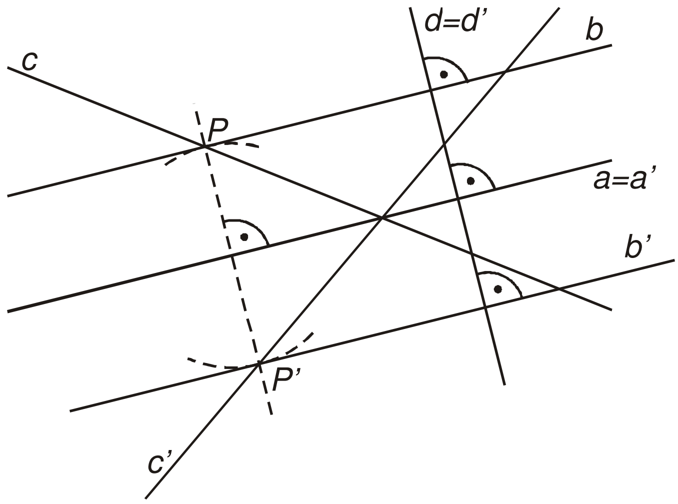
Pedagogická poznámka: Předchozí příklad rozhodně není zbytečný. Slabší studenti mají problémy s přechodem od zobrazování bodů k zobrazení přímek. Následující příklad je pro ně bez předchozího příliš náročný a hlavně si z něj nic nepamatují. U slabších studentů doporučuji následující příklad spíše jen zmínit a soustředit se na předcházející.

Př. 3: Jsou dány přímky *a*, *b*, *c* a *d*. Platí $a \parallel b$, c je různoběžné s *b* a $d \perp a$. Narýsuj (co nejúsporněji) obrazy všech těchto přímek v osové souměrnosti $O(a)$.



Přímky *a* a *d* se zobrazí samy na sebe. Obraz přímek *c* a *b* sestrojíme pomocí obrazu jejich vzájemného průsečíku:

- b' jako rovnoběžku s přímkou *b*
- c' jako přímku určenou obrazem průsečíku přímek *c* a *b* a bodem, kde se přímka *c* protíná s osou *a* (tento bod je samodružný)



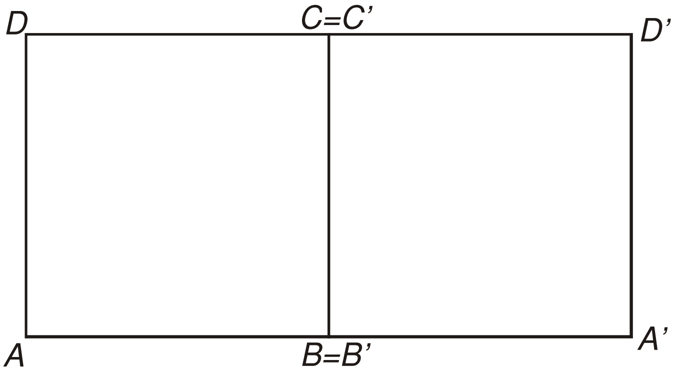
Pedagogická poznámka: Část studentů zobrazuje přímky pomocí průsečíku s přímkou *d*. Musíme sice zobrazovat dva body, ale nemusíme pro ně konstruovat kolmici.

Př. 4: Urči množinu samodružných bodů v osové souměrnosti $O(o)$. Které přímky jsou samodružné v osové souměrnosti $O(o)$?

Množinou všech samodružných bodů osové souměrnosti $O(o)$ je přímka *o* (body na ní se zobrazují samy na sebe).
Samodružné přímky v osové souměrnosti $O(o)$:

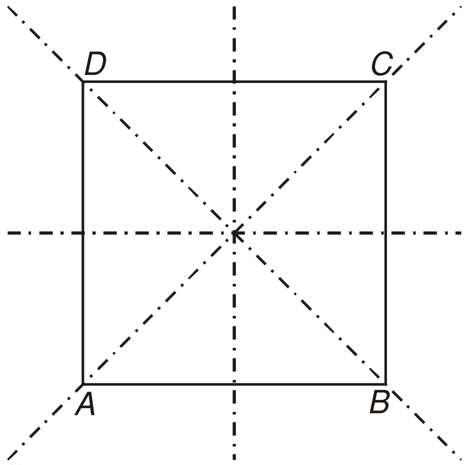
- osa souměrnosti *o* (všechny její body jsou samodružné),
- všechny přímky kolmé na osu souměrnosti *o* (každá z nich má však pouze jediný samodružný bod – průsečík s osou *o*).

Př. 5: Narýsuj obraz čtverce *ABCD* v osové souměrnosti $O(BC)$.



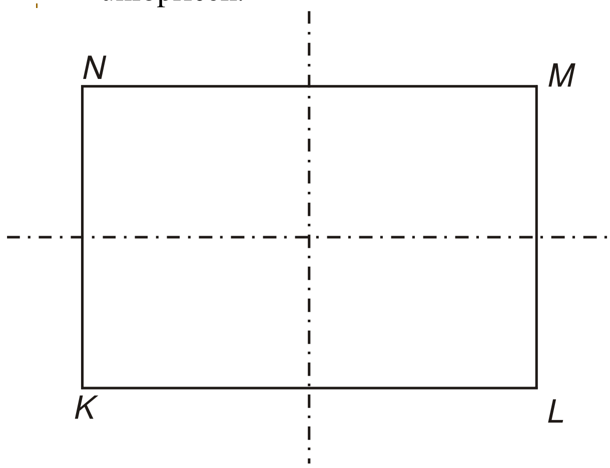
Osa souměrnosti útvaru: útvar je v osové souměrnosti podle této přímky samodružný

Př. 6: Najdi osy souměrnosti čtverce *ABCD*. Najdi osy souměrnosti obdélníku *KLMN*.



Čtverec je osově souměrný podle:

- os stran,
- úhlopříček.



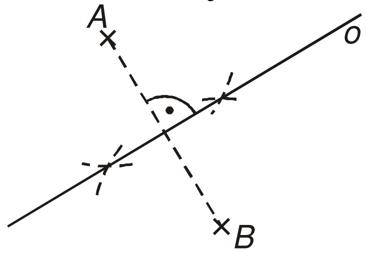
Obdélník je souměrný podle os stran.

Př. 7: Jsou dány libovolné dva body *A*, *B*. Najdi přímku *o* tak, aby platilo: $O(o): A \to B$.

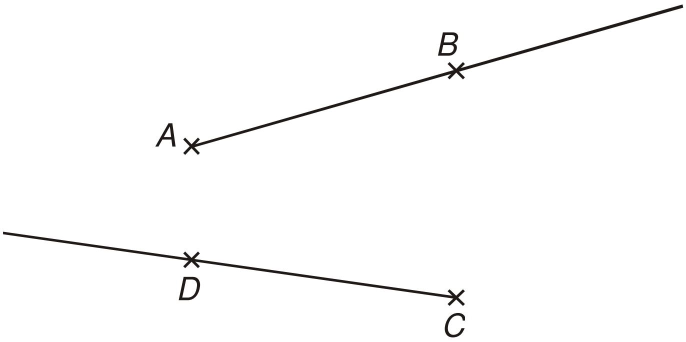
Známe bod a jeho obraz $\Rightarrow$ osa souměrnosti musí:

- být kolmá na úsečku *AB*,
- musí procházet středem úsečky *AB*,

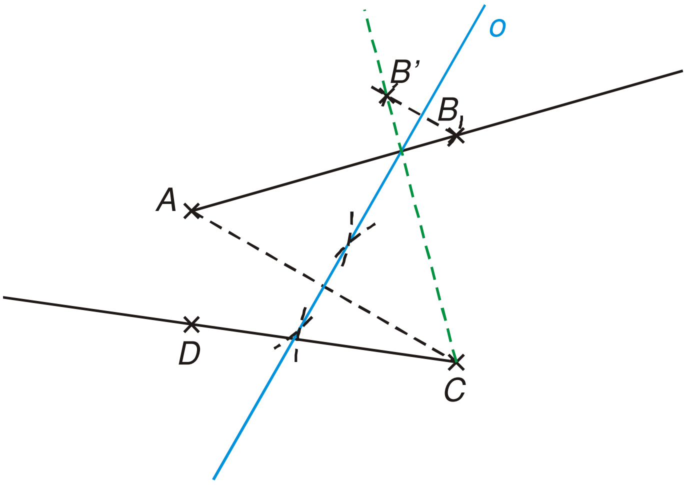
$\Rightarrow$ hledaná osa je osou úsečky *AB* (plyne už z pojmenování).



Př. 8: Jsou dány dvě různé polopřímky AB, CD s různými počátky ležící ve dvou různých přímkách. Urči osovou souměrnost, která zobrazí polopřímku AB na polopřímku CD.



Hledaná osová souměrnost musí zobrazit bod A na bod C $\Rightarrow$ jde vlastně o řešení předchozího příkladu $\Rightarrow$ najdeme osovou souměrnost zobrazující bod A na bod C a zkontrolujeme, jak se v této souměrnosti zobrazí ostatní body

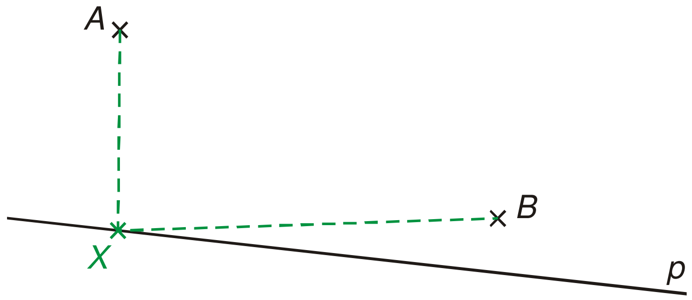


Obraz bodu B v osové souměrnosti nalezené pomocí dvojice bodů A, C neleží na polopřímce CD $\Rightarrow$ není možné nalézt osovou souměrnost, která by zobrazovala polopřímku AB na polopřímku CD $\Rightarrow$ zadaná úloha není obecně řešitelná (má řešení pouze ve speciálních případech například, kdyby se polopřímka CD shodovala s čárkovanou zelenou polopřímkou).

Pedagogická poznámka: Pokud necháte studenty řešit příklad samostatně bez toho, abyste nakreslili zadání na tabuli, můžete se spolehnout, že většině z nich se osovou souměrnost najít podaří. Nakreslí si takový speciální případ zadání, který jim to umožní. V takové situaci opět diskutujeme o zásadě, že „náčrtek by měl obsahovat všechny speciální vlastnosti uvedené v zadání, ale nic dalšího navíc“.

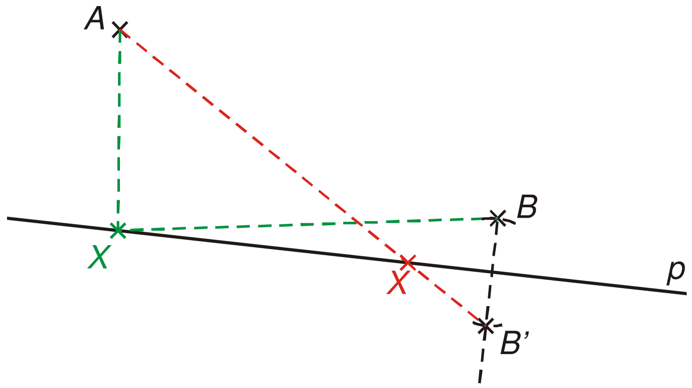
Je potřeba se studenty prodiskutovat, že „příklad obecně není možné vyřešit“ je také regulérní výsledek.

Př. 9: Jsou dány dva různé body A, B, které leží v jedné z polorovin určených přímkou p. Urči na přímce p bod X tak, aby součet $|AX|+|XB|$ byl minimální.

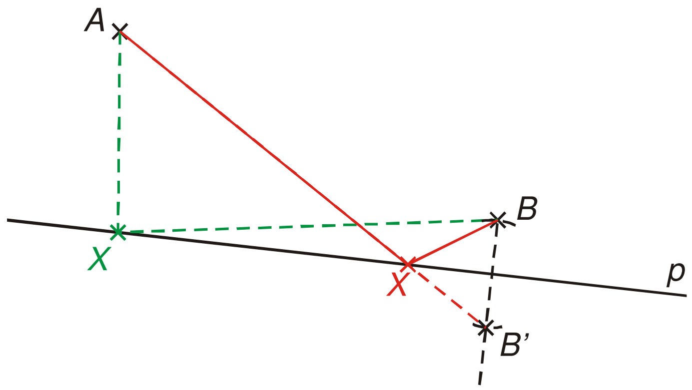


Je zřejmé, že naznačená poloha bodu X nesplňuje podmínku minimálního součtu délek. Správná poloha bodu X leží určitě víc vpravo od polohy na obrázku. Jak najít správnou polohu?

Nejkratší spojnicí dvou bodů je úsečka $\Rightarrow$ zkusíme součet vzdáleností $|AX|+|XB|$ „narovnat“ pomocí osové souměrnosti $O(p)$:



Součet $|AX|+|XB'|$ je minimální (obě úsečky tvoří jednu úsečku AB') $\Rightarrow$ součet $|AX|+|XB|$ bude také minimální (body B a B' jsou osově souměrné a proto platí $|XB'|=|XB|$)



Pedagogická poznámka: Předchozí příklad patří k těm (v geometrii velice častým), které není příliš vhodné promítat ve formě statických obrázků. Daleko názornější je konstruovat ho na tabuli nebo použít dynamický model v Cabri.

Př. 10: Petáková:
strana 81/cvičení 51 a) b) c)
strana 81/cvičení 52 a) b) c)

Shrnutí: